

VYSOKÁ ŠKOLA POLYTECHNICKÁ JIHLAVA

Aplikované strojírenství

VÝVOJ NUMERICKÉHO ŘEŠIČE PRO ÚLOHY LINEÁRNÍ
PRUŽNOSTI PŘÍHRADOVÝCH A NOSNÍKOVÝCH
KONSTRUKCÍ

Bakalářská práce

Autor práce: Lukáš Votýpka

Vedoucí práce: doc. Ing. Radek Kolman, Ph.D.

Jihlava 2025

Vysoká škola polytechnická Jihlava

Tolstého 16, 586 01 Jihlava

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Autor práce: **Lukáš Votýpka**

Studijní program: Aplikované strojírenství

Obor: Aplikované strojírenství

Garant studijního programu: Ing. Miloslav Vilímek, Ph.D.

Název práce: **Vývoj numerického řešiče pro úlohy lineární pružnosti příhradových a nosníkových konstrukcí**

Vedoucí práce: doc. Ing. Radek Kolman, Ph.D.

Cíl práce: Cílem práce bude vývoj a implementace numerického řešiče pro úlohy lineární pružnosti příhradových a nosníkových konstrukcí. Nejprve budou sestaveny lokální matice tuhosti, které budou následně sestaveny do globální matice hmotnosti. Pozornost bude věnována efektivnímu zadávání okrajových konstrukce. Práce bude realizována v prostředí Matlab.

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá vývojem numerického řešiče pro úlohy lineární pružnosti v příhradových a nosníkových konstrukcích. Cílem této práce je sestavení lokálních matic tuhosti, které budou následně transformovány do globální matice tuhosti. Zadáání okrajových podmínek a následné sledování výsledků a deformace prutové soustavy bude řešeno pomocí programu MATLAB.

Klíčová slova

Lokální matice tuhosti; Globální matice tuhosti; Prut; Styčník; Vnitřní silové účinky; Příhradové konstrukce

Abstract

This bachelor thesis deals with the development of a numerical solver for linear elasticity problems in truss and beam structures. The aim of this work is to assemble local stiffness matrices which will then be transformed into the global stiffness matrix. The application of boundary conditions and the subsequent monitoring of results and deformations on the rod system will be handled using MATLAB software.

Keywords

Local stiffness matrix; Global stiffness matrix; Rod; Joint; Internal force effects; Truss structures

Prohlašuji, že předložená bakalářská práce je původní a zpracoval/a jsem ji samostatně. Prohlašuji, že citace použitých pramenů je úplná, že jsem v práci neporušil/a autorská práva (ve smyslu zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů, v platném znění, dále též „AZ“).

Byl/a jsem seznámen/a s tím, že na mou bakalářskou práci se plně vztahuje **AZ**, zejména § 60 (školní dílo).

Podle § 47b zákona o vysokých školách souhlasím se zveřejněním své práce podle Směrnice pro vedení, vypracování a zveřejňování závěrečných prací na VŠPJ, a to bez ohledu na výsledek obhajoby.

Beru na vědomí, že VŠPJ má právo na uzavření licenční smlouvy o užití mé bakalářské práce a prohlašuji, že **s o u h l a s í m** s případným užitím mé bakalářské práce (prodej, zapůjčení apod.).

Jsem si vědom/a toho, že užít své bakalářské práce či poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠPJ, která má právo ode mě požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, vynaložených vysokou školou na vytvoření díla (až do jejich skutečné výše), z výdělku dosaženého v souvislosti s užitím díla či poskytnutím licence.

V Jihlavě dne 6. února 2025

.....

Podpis studenta

Poděkování

Na tomto místě bych chtěl poděkovat vedoucímu mé závěrečné práce, doc. Ing. Radku Kolmanovi, Ph.D., za odborné vedení, trpělivost a čas, který mi věnoval při osobních konzultacích.

Obsah

Seznam obrázků.....	8
Seznam tabulek	9
Seznam zkratk.....	10
Úvod	11
1 Příhradové konstrukce.....	12
1.1 Eiffelova věž	13
2 Geometrie a konstrukční řešení prutové soustavy	14
2.1 Geometrie prutových soustav	14
2.2 Konstrukční řešení prutových soustav.....	15
2.2.1 Nýtové spoje	15
2.2.2 Šroubové spoje	16
2.2.3 Svarové spoje	17
2.2.4 Lepené spoje	18
3 Tvorba lokálních matic a jejich začlenění do globální matice	19
3.1 Rovinné příhradové prvky.....	19
3.1.1 Transformace souřadnic	21
3.1.2 Matice tuhosti v globálním systému.....	22
4 Metody řešení prutových soustav	24
4.1 Styčnicková metoda.....	27
4.1.1 Popis.....	27
4.1.2 Grafické řešení	27
4.2 Průsečná metoda	28
4.2.1 Popis.....	28
4.2.2 Grafické řešení	28
4.3 Cremonova metoda	29
4.3.1 Popis.....	29
4.3.2 Grafické řešení	29
5 Implementace numerického řešiče pro úlohy lineární pružnosti příhradových a nosníkových konstrukcí v Matlabu	30
5.1 Skript pro nastavení počátečních parametrů a vstupních hodnot	30
5.2 Skript pro vykreslení prutové soustavy	31
5.2.1 Skript pro vykreslení styčníků (uzlů)	31
5.2.2 Skript pro vykreslení prutů mezi styčníky (uzly)	31
5.3 Skript pro výpočet délek prutů a vlastností materiálu	32
5.4 Skript pro sestavení globální matice tuhosti	33
5.5 Skript pro předepisování okrajových podmínek.....	33
6 Přehled dosažených výsledků.....	38

6.1	Určení vnitřních sil styčnickovou metodou	39
6.1.1	Určení vnější statické určitosti.....	39
6.1.2	Určení vnitřní statické určitosti.....	39
6.2	Výsledky z prostředí Matlabu	43
Závěr		45
Seznam použité literatury		46
Přílohy		47

Seznam obrázků

Obrázek 1 Příhradová konstrukce.....	12
Obrázek 2 Eiffelova věž	13
Obrázek 3 Prutová soustava	14
Obrázek 4 Nýťový spoj konstrukce	15
Obrázek 5 Šroubový spoj konstrukce	16
Obrázek 6 Svarový spoj konstrukce	17
Obrázek 7 Struktura lepeného spoje	18
Obrázek 8 Rovinná příhradová konstrukce.....	19
Obrázek 9 Souřadnicové systémy	20
Obrázek 10 Lokální souřadnicový systém	20
Obrázek 11 Dvourozměrný prutový prvek.....	22
Obrázek 12 Pevná vazba	24
Obrázek 13 Kloubová vazba	25
Obrázek 14 Posuvná vazba	25
Obrázek 15 Řešení styčnickovou metodou	27
Obrázek 16 Řešení průsečnou metodou	28
Obrázek 17 Řešení Cremonovou metodou	29
Obrázek 18 Prutová soustava	38
Obrázek 19 Deformace prutové soustavy	44

Seznam tabulek

Tabulka 1 Posuvy styčníků	43
Tabulka 2 Prodloužení/zkrácení prutů	44

Seznam zkratek

A	Průřezová plocha prutu [m^2]
E	Youngův modul pružnosti [Pa]
F	Síla [N]
f	Příčná síla [N]
$\bar{g}$	Stupně volnosti v lokálních souřadnicích
g	Stupně volnosti v globálních souřadnicích
k	Počet styčníků
k	Tuhostní matice
L	Délka prutu [m]
M	Moment síly [N.m]
N	Normálová síla [N]
p	Počet prutů
R	Reakční síla [N]
T	Transformační matice
T^T	Transponovaná matice
$[T]^{-1}$	Inverzní transformační matice
$\bar{u}$	Příčné posuvy v lokálních souřadnicích [m]
u	Příčné posuvy v globálních souřadnicích [m]
$\bar{v}$	Příčné posuvy v lokálních souřadnicích [m]
v	Příčné posuvy v globálních souřadnicích [m]
α	Úhel mezi pruty [°]
ϕ	Úhel otáčení [°]

Úvod

Tato bakalářská práce se bude zabývat vývojem numerického řešiče pro úlohy lineární pružnosti příhradových a nosníkových konstrukcí. Pro tuto práci byla zvolena jednoduchá prutová soustava sloužená z jedenácti prutů a sedmi styčníků. Tato konstrukce bude vykreslená a nadále řešena pomocí programu MATLAB. Nejprve budou sestaveny lokální matice tuhosti jednotlivých prutů. Tyto matice budou poté transformovány do globální matice hmotnosti. Dále se tato práce bude zabývat efektivnímu zadávání okrajových podmínek této konstrukce.

V první kapitole bude představena historie prutových soustav. Bude zde i zmíněna Eiffelova věž, která se stala ikonickým příkladem využití prutové konstrukce.

Druhá kapitola se bude zabývat geometrií a konstrukčním řešením prutových soustav. Budou zde postupně popsány technologie spojování prutů se styčníky.

Ve třetí kapitole bude nastíněn postup sestavování lokálních matic tuhosti. Nejprve budou sestaveny lokální matice tuhosti jednotlivých prutů, které budou následně převedeny do jedné matice v globálním souřadnicovém systému. Samotné sestavování jednotlivých matic bude následně řešeno v programu Matlab.

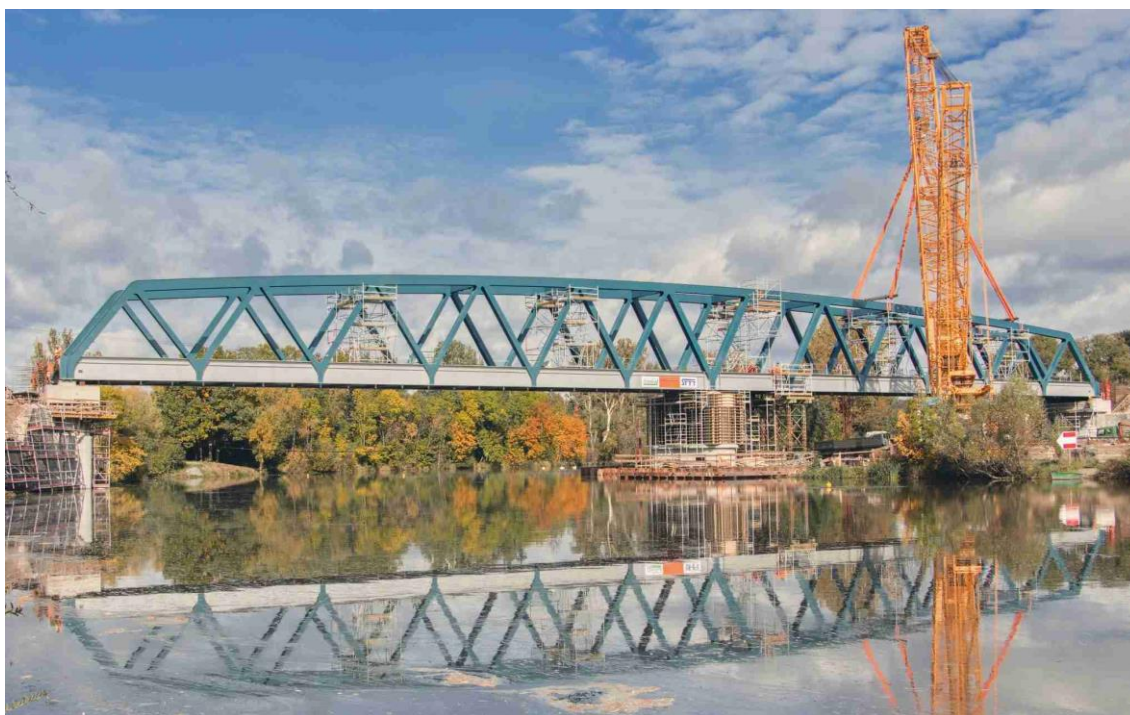
Čtvrtá kapitola se bude zabývat teorií řešení prutových soustav. Nejprve zde budou popsány jednotlivé kroky pro určení vnější a vnitřní statické určitosti. Poté budou popsány jednotlivé metody, které řeší vnitřní silové účinky prutů v soustavě. Tyto metody lze použít pouze v případě, že prutová soustava je staticky určitá.

Pátá kapitola bude o implementaci numerického řešiče v programu Matlab. Budou zde popsány postupně všechny části programu a detailně okomentovány jednotlivé proměnné a použité algoritmy a vztahy.

Šestá kapitola bude věnována výsledkům, které byly zjištěny postupným zadáváním okrajových podmínek konstrukce. Budou zde sledovány délky prutů, posuvy jednotlivých uzlů a chování prutové soustavy při zatížení. Pro výpočet vnitřních silových účinků bude použita styčnicková metoda.

1 Příhradové konstrukce

Příhradové konstrukce, známé také jako prutové soustavy, jsou typy pevných konstrukcí, které jsou složeny z prutů a styčníků. Pruty přenášejí síly a v samotné konstrukci nejčastěji tvoří geometrické obrazce ve tvaru trojúhelníků. Zato styčník tvoří společný uzel prutů. Příhradové konstrukce mají velmi široké zastoupení. Z hlediska jejich pevnosti, odolnosti, efektivnímu přenášení sil jsou díky těmto parametrům využívány ve formě mostů, stožárů, jeřábů, střešních konstrukcí a dalších inženýrských staveb. (Stavební komunita, 2012)



Obrázek 1 Příhradová konstrukce

Zdroj: Správa železnic, 2022

1.1 Eiffelova věž

Eiffelova věž je dominantní stavbou v celé Francii. Nachází se v hlavním městě v Paříži. Stavba této krásné a historické věže se datuje v letech 1887 až 1889. Původní výška této ocelové věže se zastavila na čísle 300,65 metru, což z této stavby dělalo největší stavbu na celém světě. Díky různým úpravám a instalacím antén se původní výška zvětšila o zhruba 24 metrů. V současné době věž nyní měří 324 metrů. Eiffelova věž také patří k pravidelně navštěvovaným stavbám po celém světě. (Hrady.cz, 2017)

Hlavním materiálem pro výrobu konstrukce Eiffelovy věže byla ocel. Stavba probíhala na dvou místech. Výroba konstrukce probíhala v místní továrně na okraji města a samotná montáž věže probíhala na místě, na kterém se nachází dominanta Paříže. Stavba se skládá ze tří plošin, které jsou umístěny v různých výškách. A to v 57, 115 a 276 metrech. Celá věž se nachází na čtvercovém půdorysu o délce stran 125 metrů. Stavba začala prvotním vybudováním základů. Zajímavá informace udává, že celkový tlak, který je vyvíjen věží na zemský povrch, je pouhých 4,5 kg/cm². Tato hodnota je srovnatelná s hodnotou, když sedí člověk na židli. Další zajímavou informací ohledně stavby věže je použití celkových 2 500 000 nýtů k montáži konstrukce. (Hrady.cz, 2017)

Konstrukce Eiffelovy věže je velmi specifická. V této diskuzi se vede nespočet názorů, zdali se jedná o příhradovou konstrukci nebo se jedná o konstrukci mřížkovou. Pro příhradovou konstrukci je typické využívání mřížkového spoje nosníků často trojúhelníkového tvaru. Tento způsob vede k rozdělení konstrukce na menší části, což vede k vysoké stabilitě a k zachování poměrně nízké hmotnosti. V případě mřížkové konstrukce je konstrukce navržena specificky pro zajištění stability. Věž by při tomto návrhu měla odolat síle větru a jiným přírodním katastrofám.



Obrázek 2 Eiffelova věž

Zdroj: Verde, 2015

2 Geometrie a konstrukční řešení prutové soustavy

V této kapitole bude nejprve představena geometrie prutové soustavy. Stejně jako v první kapitole bude vysvětleno spojení „prutová soustava“. Dále složení a využití prutových soustav.

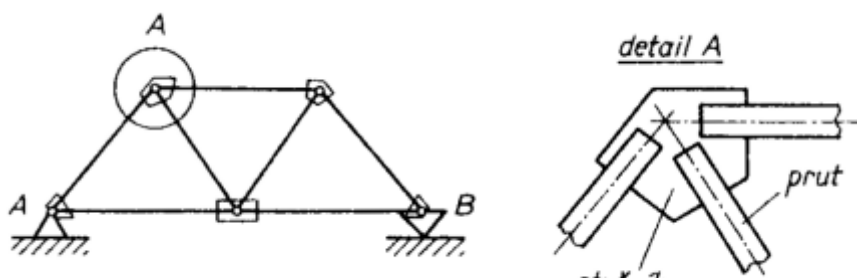
Druhá část kapitoly bude věnována konstrukčnímu řešení prutových soustav. Představíme si, jakými technologiemi mohou být konstrukce prutových soustav spojeny.

2.1 Geometrie prutových soustav

V oblasti stavebnictví a strojírenského inženýrství mají velmi široké zastoupení. V těchto oblastech se s nimi často setkáváme ve formě mostů, halových konstrukcí, jeřábů, stožárů ale i střešních konstrukcí. Jedná se o příhradové konstrukce - prutové soustavy.

Prutové soustavy se skládají z několika prutů a styčníků. Prut je základním konstrukčním prvkem v každé prutové soustavě. Hlavní výhodou prutů je jednoduchý průřez, který vede ke snadné výrobě a spojení. Nejčastěji se pruty vyrábějí s průřezem ve tvaru kruhu, obdélníku nebo čtverce.

Styčník je stejně jako prut základním konstrukčním prvkem. V prutové soustavě spojuje jednotlivé pruty v jednom bodě. Podle typu spoje mohou být styčníky kloubové, které umožňují rotaci prutů. Dále pak styčníky pevné, které zajišťují větší tuhost a odolnost proti deformacím. Typickým příkladem použití pevných styčníků jsou rámové konstrukce.



Obrázek 3 Prutová soustava

Zdroj: Svoboda, 2012

2.2 Konstrukční řešení prutových soustav

2.2.1 Nýtové spoje

Nýtování je technologický proces, při kterém dochází ke spojování dvou a více strojních součástí. Nýtový spoj patří do kategorie nerozebíratelných spojů. Tyto spoje nelze při jejich rozpojení znovu plně obnovit, jelikož některá ze spojovaných součástí je poškozena nebo deformována. V současnosti jsou nýtové spoje částečně nahrazeny svarovými spoji nebo lepením, popř. šroubovými spoji. Proto se jejich využití přesunulo do odvětví stavebnictví k opravám historických konstrukcí a pro přenosné konstrukce. Dále jsou využívány v oděvním průmyslu, v elektrotechnice nebo v přesné mechanice. (Lávička, 2013)

Základním prvkem každého nýtového spoje je nýt. Nýt je konstrukčně rozdělen na hlavu a dřík. Hlava nýtu slouží k pevnému uchycení na povrchu materiálu a dřík je část nýtu, která prochází spojovanými částmi. Druhy nýtů se rozdělují podle hlavy na nýty s půlkulatou hlavou, zápustnou hlavou, čočkovitou hlavou a nýt kotlový a lodní. Dle materiálu mohou být nýty ocelové, hliníkové, měděné a mosazné. Z hlediska konstrukce se jedná o nýty duté, výbušné a trhací. (Lávička, 2013)

Nýtování lze rozdělit na dva základní druhy: přímé a nepřímé. Nepřímé nýtování je častěji používaný způsob nýtování. Spočívá ve spojení součástí mezi hlavy nýtů, kde jsou nýty vloženy do předem vyvrtaných otvorů. Roznýtováním konce dříku nýtů vznikne tzv. závěrná hlava, která zajišťuje pevnost spoje. Přímé nýtování spočívá ve vytváření spoje bez použití nýtů, kdy je pro spoj použita část materiálu jednoho ze spojovaných dílů. Provádí se za studena a je určen pro méně namáhané spoje. (Lávička, 2013)



Obrázek 4 Nýtový spoj konstrukce

Zdroj: Docplayer, 2025

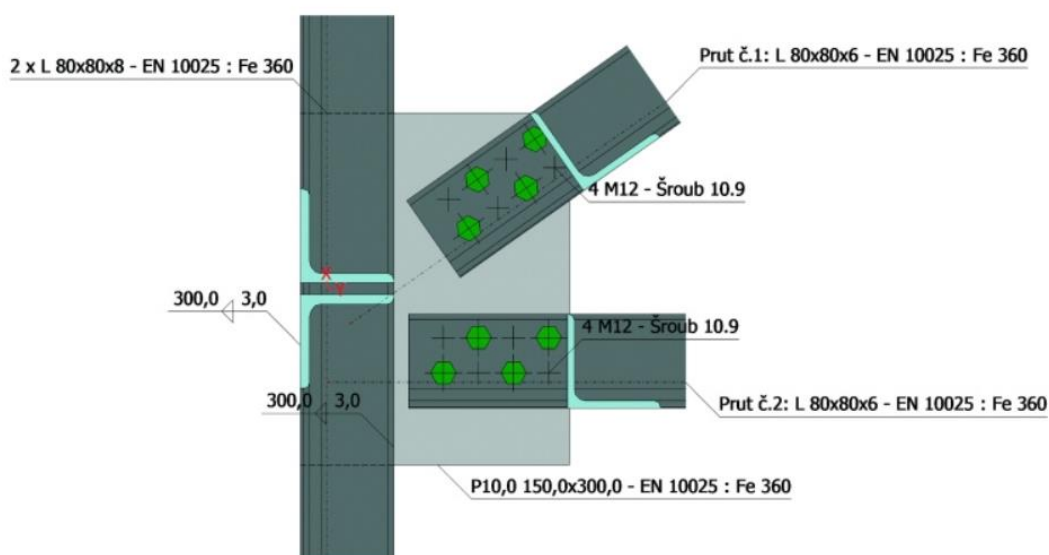
2.2.2 Šroubové spoje

Šroubový spoj je druh rozebíratelného spojení, který umožňuje spojení dvou nebo více částí. Jedná se o nejstarší a nejpoužívanější typ spojů. Mezi základní šroubové spoje patří: spojení průchozím maticovým šroubem s hlavou a maticí, šroub se zápusťnou hlavou bez matice, závrtný šroub s maticí.

Složení šroubového spoje:

- Šroub – je spojovací prvek, který se skládá z hlavy a dříku. Dřík je válcová část šroubu, která prochází spojovaným materiálem a je opatřen závitem v celé nebo částečné délce. Hlava šroubu slouží k pevnému uchycení nástroje při šroubování. Může mít různé tvary, např. šestihrannou, kulatou, zápusťnou.
- Matice – je spojovací prvek určený k uchycení šroubu a k vytvoření kompletního šroubového spojení. Matice je opatřena vnitřním závitem umožňující zašroubování šroubu a vytvoření pevného spoje.
- Podložka – je tenký spojovací prvek, který se používá mezi hlavou šroubu a spojovacím materiálem nebo mezi maticí a spojovacím materiálem. Podložka se používá pro účely jako ochrana opotřebení při opakované montáži, pro snížení tření pod maticí, pro rovnoměrnější rozložení sil ve spoji.

Šroubové spoje mají velmi široké zastoupení v různých oborech. Ve stavebnictví se používají pro montáž kovových konstrukcí. Dále jejich využití nalezneme ve strojírenství, v automobilovém průmyslu pro spojení motorů, podvozků a karoserií.



Obrázek 5 Šroubový spoj konstrukce

Zdroj: Konstrukce, 2012

2.2.3 Svarové spoje

Svařování je způsob vytváření nerozebíratelného spojení dvou a více materiálů, obvykle kovů nebo plastů. Jedná se o nejrozšířenější typ nerozebíratelného spojení. Princip svařování prochází dvěma hlavními etapami. První etapou je dán ohřev spojovaných materiálů na jejich bod tavení. V některých případech je nutností použití i přídavného materiálu ve formě svařovacích drátů nebo elektrody. Ve druhé etapě svařování dochází k ochlazení roztavených materiálů, což vede k vytvoření pevného spojení. (Garstka, 2013)

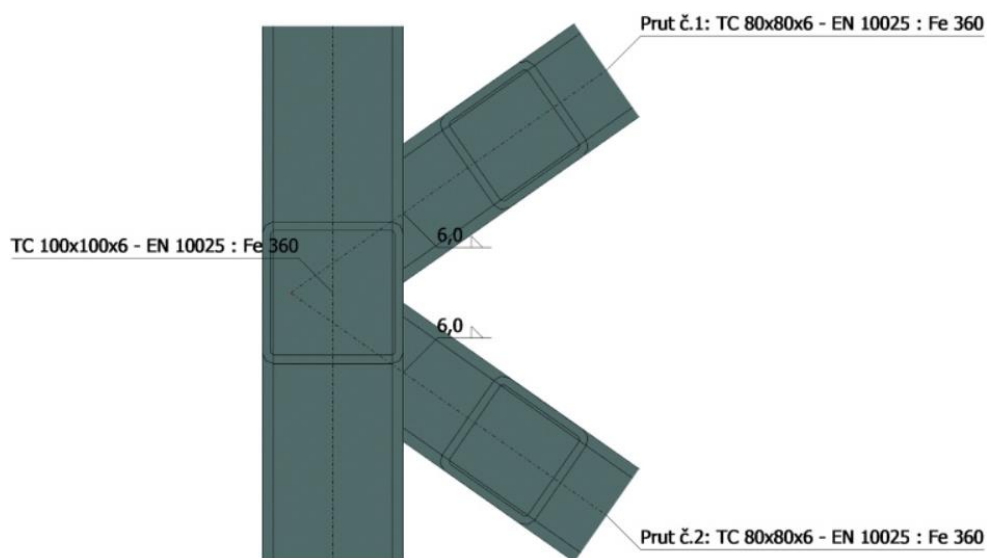
Mezi hlavní výhody svařování patří:

- Trvalé a pevné spojení materiálu
- Snadná oprava svarů
- Možnost automatizace procesu
- Dosažení libovolného tvaru svařence
- Těsnost spoje

Nevýhody svarových spojů:

- Nerozebíratelnost spoje
- Nutná úprava stykových ploch
- Vyšší nároky na kvalifikaci svářečů
- Svařování některých materiálů není možné

Mezi obvyklé technologie svařování patří svařování elektrickým odporem, elektrickým obloukem, plamenem, světelným paprskem, plazmatem, proudem elektronů, termitem bez použití tlaku a svařování termitem tlakové. (Garstka, 2013)



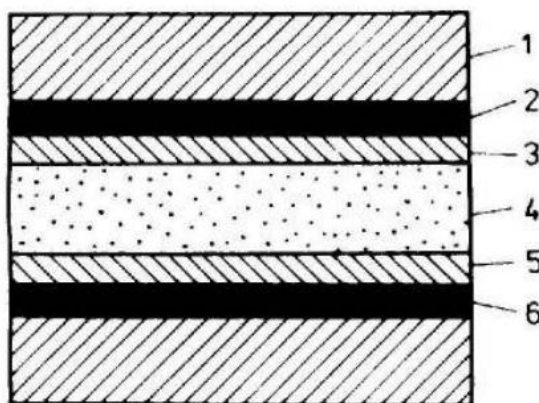
Obrázek 6 Svarový spoj konstrukce

Zdroj: Konstrukce, 2012

2.2.4 Lepené spoje

Lepení je technologický proces, při kterém dochází ke spojení dvou a více materiálů pomocí lepidla (adhesiv). Vzniká nerozebíratelné spojení, mezi jehož hlavní výhody patří vodotěsnost spoje, nízká hmotnost spoje, estetický vzhled spoje a spojování různých materiálů s odlišnými vlastnostmi. Lepené spoje mají i své nevýhody. Mezi nevýhody patří nízká teplotní odolnost, příprava povrchu, pevnost v některých případech. (Gregor, 2021)

Lepidlo je látka, jejíž základní strukturou je pryskyřice, umožňující vytvoření pevného a trvalého spojení. Lepidlo lze použít za předpokladu splnění následujících podmínek: provozní teploty, smykové pevnost spoje, materiálu spojovaných součástí a vytvrzovacích podmínek. Lepidlo musí být vytvořeno tak, aby byla zachována rovnováha adheze a koheze. Dále musí být lepený spoj vytvářen jednoduchou technologií. (Gregor, 2021)



Obrázek 7 Struktura lepeného spoje

Zdroj: Gregor, 2021

1. Základní materiál
2. Adhezní zóna
3. Přejícná adhezní zóna
4. Kohezní zóna
5. Přejícná kohezní zóna
6. Adhezní zóna

(Gregor, 2021)

Lepené spoje mají široké uplatnění v automobilovém a leteckém průmyslu, ve strojírenství a stavebnictví, v elektrotechnice. Z důvodu vysoké pevnosti a tuhosti spojování kovových příhradových konstrukcí lepení doplňuje další technologie spojování materiálů např. nýtování. (Gregor, 2021)

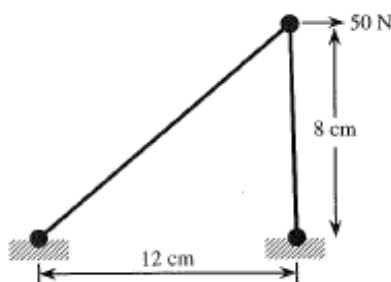
3 Tvorba lokálních matic a jejich začlenění do globální matice

Tato kapitola je čerpána z literatury o Úvodu do analýzy a návrhu metodou konečných prvků. (Kim, Sankar, 2008) Konkrétně se jedná o kapitolu dva: Jednoosé tyčové a příhradové prvky přímou metodou. Zde si představíme jak správně sestavovat lokální matice tuhosti a jejich transformace do globální matice.

3.1 Rovinné příhradové prvky

Tato část kapitoly se věnuje postupu sestavení matice tuhosti a obecné řešení dvojrozměrných (rovinných) příhradových konstrukcí pomocí přímé metody tuhosti. Pro lepší znázornění postupů byla zvolena příhradová konstrukce složená zde dvou prvků. (Kim, Sankar, 2008)

Tato příhradová konstrukce je znázorněná na obrázku 11. Na horní uzel jsme ve vodorovném směru zvolili sílu $F = 50 \text{ N}$.



Obrázek 8 Rovinná příhradová konstrukce

Zdroj: Kim, Sankar, 2008

Při zavedení lokálního souřadnicového systému může být matice tuhosti jednoosých prutů použita pro jednotlivé prvky příhradové konstrukce. U rovinného příhradového prvku celkově rozeznáváme dva souřadnicové systémy:

1. Globální souřadnicový systém vztažený k celé konstrukci
2. Lokální souřadnicový systém vztažený pro daný prvek, osa x musí ležet v délce tohoto prvku

Dle obrázku 12. můžeme vztah mezi silou a přemístěním příhradového prvku definovat v lokálním souřadnicovém systému následovně:

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Kde E vyjadřuje Youngův modul pružnosti, A vyjadřuje průřezovou plochu a L vyjadřuje délku prutu. Vztah EA/L udává tuhost pružiny k .

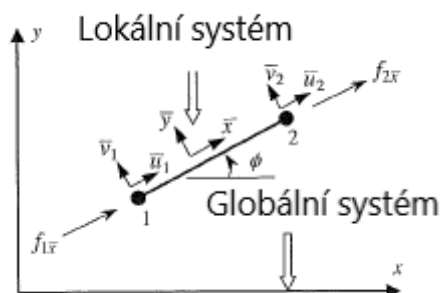
Síly a posunutí jsou vyjádřeny v lokálním souřadnicovém systému. Pro zobecnění rovnice musíme zvážit příčné posuvy v_1 a v_2 ve směru osy y . Příčné síly, které odpovídají v jednotlivých uzlech, označíme jako f_{1y} a f_{2y} . (Kim, Sankar, 2008)

V případě příhradového prvku příčné síly neexistují a tím pádem mají nulovou hodnotu. Na základě tohoto vyjádření můžeme matici tuhosti rozšířit o tyto síly a o posuny ve směru y . (Kim, Sankar, 2008)

$$\begin{Bmatrix} f_{1\bar{x}} \\ f_{1\bar{y}} \\ f_{2\bar{x}} \\ f_{2\bar{y}} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

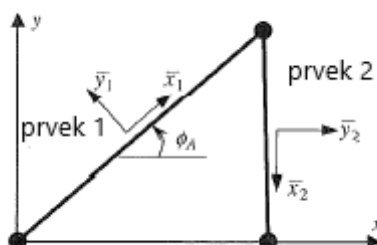
Rozšířené vlastnosti lokální matice tuhosti:

1. Matice čtvercového tvaru
2. Symetrická matice
3. Diagonální prvky matice jsou větší nebo rovno nule



Obrázek 9 Souřadnicové systémy

Zdroj: Kim, Sankar, 2008



Obrázek 10 Lokální souřadnicový systém

Zdroj: Kim, Sankar, 2008

Tato matice platí pouze pro konkrétní prvek, který je uveden v předchozím příkladu. Tuto matici tedy nelze použít pro jiné prvky, protože každý prvek má své originální souřadnice. Lokální souřadnice pro prvek dva jsou vyobrazeny na obrázku 13.

Pro vyřešení tohoto problému je nutné vyvinout systém rovnic tak, aby propojil všechny prvky v mřížce. Toho docílíme transformací vztahů síla-posun do globálních souřadnic, což vyžaduje použití transformačního vektoru souřadnic. (Kim, Sankar, 2008)

3.1.1 Transformace souřadnic

Protože jsou síly a posuny považovány za vektorové veličiny, můžeme k určení vztahu mezi posuny v lokálních a globálních souřadnicích v uzlu využít vektorovou transformaci. Lokální posuny pro uzel jedna můžeme vyjádřit ve tvaru:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix}$$

Vztah pro uzel dva:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

Při sloučení těchto vztahů dostaneme:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

lokální globální

Pro zjednodušení můžeme vztah mezi lokálními a globálními posuny zapsat ve tvaru:

$$\{\bar{g}\} = [T]\{g\} \quad (3)$$

Kde $\{\bar{g}\}$ a $\{g\}$ označují stupně volnosti v lokálních a globálních souřadnicích, $[T]$ označuje transformační matici. Síly $\{f\}$ v lokálních souřadnicích jsou navázány se silami $\{\bar{f}\}$ v globálních souřadnicích takto:

$$\begin{Bmatrix} f_{1\bar{x}} \\ f_{1\bar{y}} \\ f_{2\bar{x}} \\ f_{2\bar{y}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \end{Bmatrix}$$

lokální globální

nebo ve zkrácené podobě ve vztahu:

$$\{\bar{f}\} = [T]\{f\} \quad (4)$$

3.1.2 Matice tuhosti v globálním systému

Matici tuhosti prvku z lokálního systému můžeme transformovat do globálního systému pomocí rovnice uvedené v předchozí části.

Na obrázku 14 je vidět libovolné umístění prutu v dvojrozměrném prostoru.

Vztah mezi silou a posunem v lokálním systému můžeme vyjádřit ve tvaru:

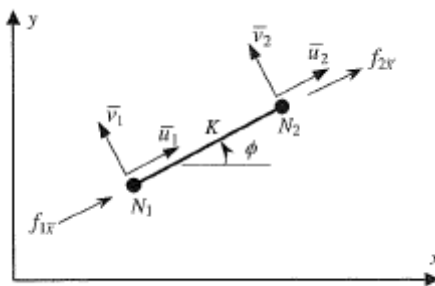
$$\begin{Bmatrix} f_{1\bar{x}} \\ f_{1\bar{y}} \\ f_{2\bar{x}} \\ f_{2\bar{y}} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Ve zkrácené podobě lze vyjádřit ve tvaru:

$$\{f\} = [k]\{g\} \quad (6)$$

Po dosazení rovnic (3) a (4) do rovnice (5) dostaneme:

$$[T]\{f\} = [k][T]\{g\}$$



Obrázek 11 Dvourozměrný prutový prvek

Zdroj: Kim, Sankar, 2008

Pokud obě strany rovnice vynásobíme maticí $[T]^{-1}$, dostaneme:

$$\{f\} = [T]^{-1} [k][T] \{g\}$$

globální globální

nebo

$$\{f\} = [k]\{g\} \quad (7)$$

Po vyjádření $[k]$ dostaneme matici tuhosti v globálním systému ve tvaru:

$$[k] = [T]^{-1} [k][T] \quad (8)$$

Pokud dokážeme, že inverze transformační matice $[T]$ se shoduje s její transpozicí, po vyjádření $[k]$ dostaneme:

$$[k] = [T]^T [k] [T] \quad (9)$$

Po maticovém násobení v rovnici (9) dostaneme konkrétní výraz pro $[k]$ ve tvaru:

$$[k] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2\phi & \cos\phi \sin\phi & -\cos^2\phi & -\cos\phi \sin\phi \\ \cos\phi \sin\phi & \sin^2\phi & -\cos\phi \sin\phi & -\sin^2\phi \\ -\cos^2\phi & -\cos\phi \sin\phi & \cos^2\phi & \cos\phi \sin\phi \\ -\cos\phi \sin\phi & -\sin^2\phi & \cos\phi \sin\phi & \sin^2\phi \end{bmatrix} \quad (10)$$

Z rovnice (10) je patrné, že matice tuhosti prutu v rovině je závislá na délce L , Youngův modul pružnosti E , ploše průřezu A a na úhlu orientace v souřadnicovém systému. Tato matice je symetrická a její determinant je roven nule. Dále můžeme konstatovat, že matice tuhosti je pozitivně semidefinitní a její diagonální prvky jsou buď nulové, nebo kladné. (Kim, Sankar, 2008)

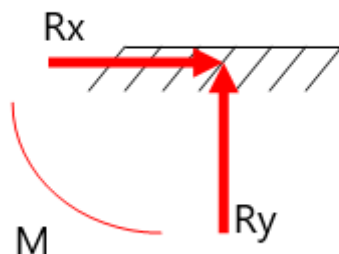
4 Metody řešení prutových soustav

Prutové soustavy musí být navrženy tak, aby splňovali bezpečnost, stabilitu, funkčnost a pevnost konstrukce. Při návrhu a početní analýze konstrukce jsou tyto podmínky řešeny pomocí metod řešení prutových soustav. Konkrétně styčnicková, průsečíková a Cremonova metoda se využívá u prutových soustav, které jsou staticky určité a kloubově spojené. Pomocí těchto metod můžeme určit rovnováhu sil, které působí na jednotlivé styčníky konstrukce. Dále můžeme početně určit osové síly v jednotlivých prutech, které jsou namáhány na tlak a tah.

Při řešení prutových soustav se postupuje podle jednotlivých kroků, které nám zaručí správnost řešení:

1. Určení vnější statické určitosti soustavy

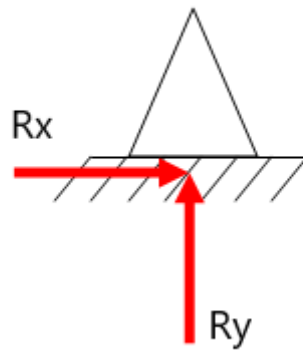
Pomocí vnější statické určitosti určíme neznámé síly ve vnějších vazbách prutové soustavy. Postup určení vnější statické určitosti spočívá v uvolnění vnějších vazeb soustavy. Prutová soustava je staticky určitá po vnější stránce tehdy, když je počet neznámých reakčních sil roven počtu rovnic rovnováhy. Rovnice rovnováhy se stanovují v ose x , v ose y a momentem vztaženým k určitému bodu v soustavě, nejlépe k vnější podpoře. Toto uvolnění probíhá v předem zvoleném souřadnicovém systému. Nejčastěji se setkáváme s pevnou, kloubovou nebo posuvnou vazbou. (Zeman, 2023b)



Obrázek 12 Pevná vazba

Zdroj: vlastní

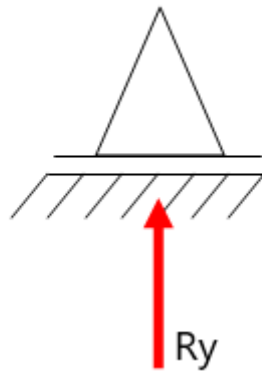
Pevná vazba odebírá 3 stupně volnosti. A to v ose x , y a moment.



Obrázek 13 Kloubová vazba

Zdroj: vlastní

Kloubová vazba odebírá 2 stupně volnosti. Umožňuje posun v ose x a v ose y.



Obrázek 14 Posuvná vazba

Zdroj: vlastní

Posuvná vazba odebírá 1 stupeň volnosti. Umožňuje pohyb pouze v jednom směru.

2. Určení vnitřní statické určitosti soustavy

Vnitřní statická určitost zkoumá osově síly v prutech. Konkrétně to, jestli máme dostatek rovnic na výpočet všech osových sil. (Zeman, 2023b)

Pro určení vnitřní statické určitosti používáme vztah:

$$p = 2 \cdot k - 3 \quad (11)$$

Kde p je počet prutů a k je počet styčníků. Od tohoto vztahu je odečtena hodnota počtu rovnic rovnováhy, které se používají pro určování vnější statické určitosti. Pokud se obě strany rovnají, jedná se o soustavu vnitřně určitou. Pokud je pravá strana větší než levá strana, jedná se o soustavu staticky vnitřně neurčitou. Pokud je levá strana větší než pravá, jedná se o soustavu staticky vnitřně neurčitou. Tato prutová soustava je nestabilní a může dojít k jejímu pádu. (Zeman, 2023b)

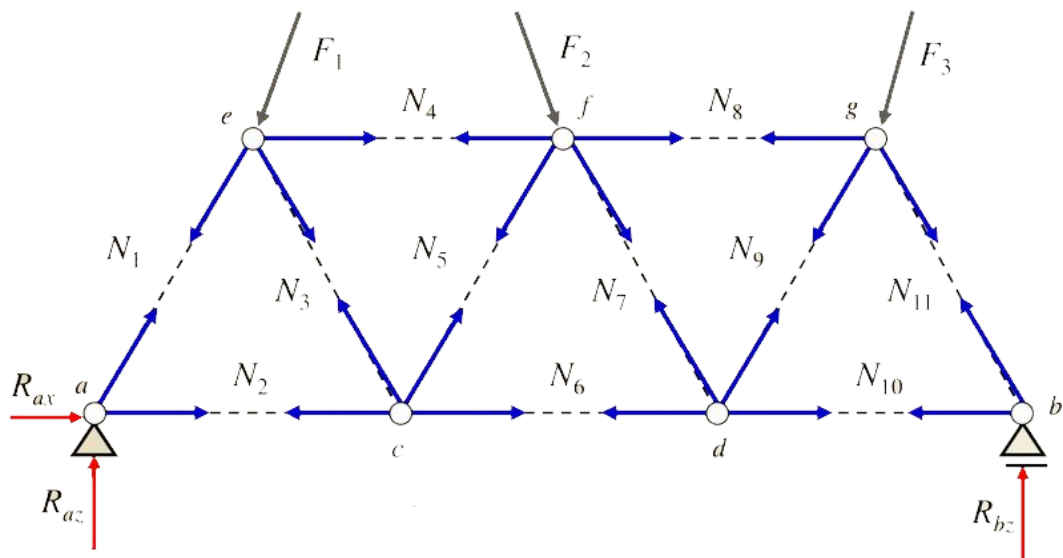
4.1 Styčníková metoda

4.1.1 Popis

Styčníková metoda se používá k určení vnitřních sil v prutech. Prutová soustava je rozdělena na samotné styčníky. Pruty, které vedou ze styčníků, jsou nahrazeny vnitřními silami. Pro zachování zákona akce a reakce by měli veškeré vnitřní síly směřovat ven ze styčníků. Poté je metoda řešena rovnicemi statické rovnováhy ve dvou směrech. Po vyřešení vnitřních sil všech prutů jsou síly v kladném směru namáhány na tah a síly v záporném směru namáhány na tlak. (Zeman, 2023b)

4.1.2 Grafické řešení

Grafické řešení styčníkovou metodou je zobrazeno na obrázku 15.



Obrázek 15 Řešení styčníkovou metodou

Zdroj: Hrušková, 2016

4.2 Průsečná metoda

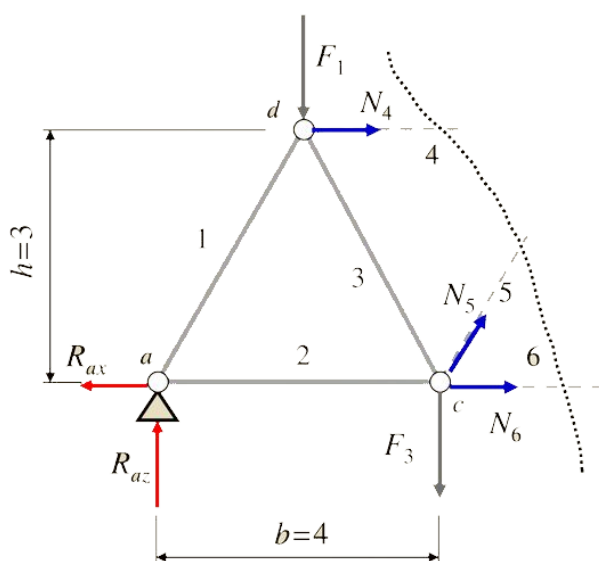
4.2.1 Popis

Průsečná metoda se používá jen pro úlohy staticky určité po vnější i vnitřní stránce. Princip této metody je založen na použití řezu, který prutovou soustavu rozdělí na dvě části, které jsou v rovnováze. Řez soustavy musí být proveden tak, aby procházel třemi pruty, jejichž osově síly jsou neznámé. Další podmínkou je, že pruty nesmí být rovnoběžné ani mít společný styčník. (Zeman, 2023a)

Průsečná metoda se často využívá v případech, kdy je potřeba určit pouze některé síly v prutech, a její použití lze kombinovat se styčnickovou metodou k získání dalších osových sil prutů. (Zeman, 2023a)

4.2.2 Grafické řešení

Řez, který má prutovou soustavu rozdělovat na dva obrazce, je znázorněný na obrázku 16.



Obrázek 16 Řešení průsečnou metodou

Zdroj: Hrušková, 2016

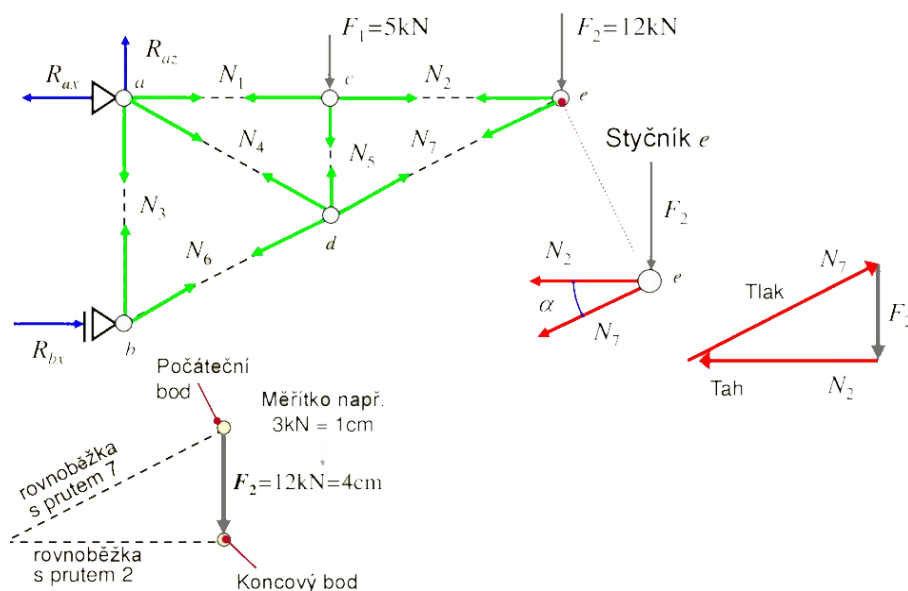
4.3 Cremonova metoda

4.3.1 Popis

Cremonova metoda je jednou z metod určených ke stanovení vnitřních sil v prutových soustavách. Její princip je založen na grafickém řešení soustav sil. Důležitým bodem je stanovení počátečního měřítka soustavy. Použití Cremonovi metody je možné pouze v omezeném stavu. Tato metoda totiž vychází z podmínek rovnováhy sil v rovině. Znamená to, že řešené jednotlivé styčníky mohou mít maximálně dvě neznámé osově síly. Pro správný postup je nejprve stanoven směr pro vyřešení jednotlivých styčníků. Poté jsou jednotlivé síly graficky přeneseny pomocí rovnoběžky do tzv. Cremonova diagramu, kde jsou změřeny a následně převedeny na reálné hodnoty podle předem zvoleného měřítka. (Šebek, 2012)

4.3.2 Grafické řešení

Postup dle Cremonovi metody je znázorněný i s převodem síly na reálné hodnoty na obrázku 17.



Obrázek 17 Řešení Cremonovou metodou

Zdroj: Slideplayer, 2025

5 Implementace numerického řešiče pro úlohy lineární pružnosti příhradových a nosníkových konstrukcí v Matlabu

Celý funkční program je uveden v příloze č.1. Dále jsou popsány postupně všechny části programu a detailně okomentovány jednotlivé proměnné a použité algoritmy a vztahy.

5.1 Skript pro nastavení počátečních parametrů a vstupních hodnot

Začátek úvodního kódu v Matlabu představuje přípravu pracovního prostoru. Dochází k zavření všech grafických oken, které byly v Matlabu otevřeny. Poté je pracovní prostor vyčištěn. Po přípravě pracovního prostoru poskytujeme pro další výpočty základní informace o konkrétní prutové soustavě. Pro účely tvorby numerického řešiče byla zvolena prutová soustava složená ze sedmi styčníků (uzlů) a jedenácti prutů. Prutová soustava je řešena v souřadnicovém systému, kdy osa x směřuje zleva doprava a osa y směřuje směrem nahoru. Matice X tedy představuje souřadnice všech sedmi styčníků (uzlů). Matice C definuje pruty mezi jednotlivými styčníky. Například: první prut spojuje styčníky (uzle) jedna a dva. Pro další řešení prutové soustavy je zvolen Youngův model pružnosti a průřez prutů. Youngův modul pružnosti byl zvolen $200 \cdot 10^9$, což je běžná hodnota pro ocel. Průřez prutů byl zvolen $0,1 \text{ m}^2$. Dále program spočítá počet styčníků (uzlů) a prutů pro potřebu dalších výpočtů.

```
close all; % Zavření všech otevřených grafických oken
clear all; % Vymazání všech proměnných z pracovního prostoru
```

```
NDIM=2; % Počet dimenzí (2D)
```

```
% Definice uzlů v prostoru (souřadnice uzlů)
X=[0 0;1 3;2 0;3 3;4 0;5 3;6 0];
```

```
% Definice prutů (spojení mezi uzly)
C=[1,2;1,3;2,3;2,4;3,4;3,5;4,5;4,6;5,6;5,7;6,7];
```

```
E = 200e9; % Youngův modul pružnosti [Pa]
A = 0.1; % Průřezová plocha [m^2]
```

```
number_stycnik = size(X,1); % Počet uzlů
number_prutu = size(C,1); % Počet prutů
```

5.2 Skript pro vykreslení prutové soustavy

5.2.1 Skript pro vykreslení styčníků (uzlů)

Tento kód je zaměřený na vykreslení styčníků ve 2D prostoru. Každý styčník je zobrazen jako bod v grafu. Souřadnice jednotlivých styčníků (uzlů) jsou získány z matice X . Graf je ohraničen pomocí pevně stanovených bodů na souřadnicích $(-1, 7)$ v ose x a $(-1, 4)$ v ose y . Pro vykreslování dalších vizualizací je grafické okno ponecháno otevřené příkazem *hold on*.

```
N=size(X); % Počet řádků (uzlů)

% Vykreslení uzlů
for i=1:number_styčník
    x_point=X(i,1);
    y_point=X(i,2);
    figure(1)
    plot(x_point,y_point,'o') % Kreslení uzlů jako body
    line(-1, 7);
    line(-1, 4);
    hold on
end
```

5.2.2 Skript pro vykreslení prutů mezi styčníky (uzly)

Tento kód vykresluje pruty mezi styčníky (uzly), kterou jsou již vykresleny do grafického okna. Pro vykreslení prutů je použit cyklus *for*, který pracuje se dvěma maticemi. Z matice C získává informace o tom, mezi které styčníky (uzly) je jednotlivý prut spojen. Poté přechází do matice X , ze které získá souřadnice konkrétních styčníků (uzlů) spojených prutem. Pomocí příkazu *plot* dochází k vykreslení čáry mezi dané styčníky (uzly).

```
% Vykreslení prutů mezi uzly
for i = 1:size(C, 1)
    line1 = X(C(i, 1), :);
    line2 = X(C(i, 2), :);

    plot([line1(1), line2(1)], [line1(2), line2(2)], 'k'); % Kreslení prutů jako čáry
end
```

5.3 Skript pro výpočet délek prutů a vlastností materiálu

Pro výpočet délek prutů byl opět použit cyklus *for*, který prochází všechny pruty v konstrukci a vypočítává jejich délky pomocí Pythagorovy věty. Tyto výsledky jsou následně uloženy do pole *lv(i)*. Nejprve však kód získává indexy dvou uzlů z matice *C*, která udává propojení prutů mezi jednotlivými styčníky. Na základě těchto indexů jsou přiřazeny souřadnice příslušných uzlů z matice *X*. Tento kód dále ke každému prutu přiřadí předem definovaný Youngův modul pružnosti a průřezovou plochu.

```
% Výpočet délek jednotlivých prutů
for i = 1:size(C, 1)
    a = C(i, 1);
    b = C(i, 2);

    x1 = X(a, 1);
    y1 = X(a, 2);

    x2 = X(b, 1);
    y2 = X(b, 2);

    lv(i) = sqrt((x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2); % Délka prutu
    Ev(i) = E; % Youngův modul
    Av(i) = A; % Průřezová plocha
end
```

5.4 Skript pro sestavení globální matice tuhosti

Pro sestavení globální matice tuhosti prutové soustavy byl vytvořen tento skript na základě uvedených informací o prutové soustavě a informací z literatury o analýze a návrhu konečných prvků. Tento skript řeší několik klíčových kroků pro sestavení samotné matice. Nejprve je vytvořena indexační matice IE . Tato matice přiřazuje každému styčníku a jeho souřadnici jedinečné číslo. Tím je určeno správné číslování stupňů volnosti v prutové soustavě.

Dalším klíčovým krokem je vytvoření nulové lokální matice tuhosti K_g čtvercové tvaru, která se následně plní hodnotami z jednotlivých prutů. Tato část kódu dále prochází jednotlivé pruty v soustavě. Pro každý prut je vytvořena lokální matice tuhosti K_{el_glob} , která je transformována do globální souřadnicové soustavy.

V dalším kroku jsou lokální matice tuhosti přičítány do globální matice K_g na správné pozice, které odpovídají stupňům volnosti uzlů jednotlivého prutu. K odstranění numerických nepřesností jsme provedli symetrizaci matice.

```
% Přiřazení čísel stupňům volnosti jednotlivých uzlů
a=0;
for i=1:number_stycnik
    for j=1:NDIM
        a=a+1;
        IE(i,j)=a; % Matice indexů stupňů volnosti
    end
end

%cislo_rovnice = IE(2,2);

K_g=zeros(number_stycnik*NDIM,number_stycnik*NDIM); % Globální matice tuhosti

% local-elemental stiffness matrix

pocet_uzlu_prutu=2; % Počet uzlů na jednom prutu (každý prut spojuje 2 uzly)

% Sestavení globální matice tuhosti
for i_prut=1:number_prutu

    %cislo_prutu =i_prut;
    K_el_glob=matice_tuhosti_prutu(i_prut,X,C,Av,Ev,Iv); % Výpočet elementární matice tuhosti
```

% Převod elementární matice do globální soustavy

```

a=0;
for i=1:pocet_uzlu_prutu
    for j=1:NDIM
        a=a+1;
        b=0;
        for k=1:pocet_uzlu_prutu
            for l=1:NDIM
                b=b+1;

                a;
                b;

                for i = 1:pocet_uzlu_prutu
                    for j = 1:NDIM
                        AA = IE(C(i_prut, i), j);

                        for k = 1:pocet_uzlu_prutu
                            for l = 1:NDIM
                                BB = IE(C(i_prut, k), l);

                                K_g(AA, BB) = K_g(AA, BB) + K_el_glob(NDIM * (i - 1) + j, NDIM * (k - 1) + l);
                            end
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
end
end
end
end
end
end
end
end
end

K_g = 1/2*(K_g+K_g'); % Symetrizace matice tuhosti

```

5.5 Skript pro předepisování okrajových podmínek

Pro řešení prutové soustavy podle vytvořeného numerického řešiče byly zvoleny následující okrajové podmínky:

- Síla F o velikosti 100 N působí na čtvrtém uzlu proti předem zvolenému souřadnicovému systému v ose y .
- Nulový posuv ve směru x pro uzel jedna.
- Nulový posuv ve směru y pro uzel jedna.
- Nulový posuv ve směru y pro uzel sedm.
- Pro první stupeň volnosti (směr x prvního uzlu) je posuv nulový.
- Pro čtvrtý stupeň volnosti (směr x druhého uzlu) je posuv nulový.
- Pro třináctý stupeň volnosti (směr y sedmého uzlu) je posuv nulový.

```
F_z = zeros(number_styčník * NDIM, 1); % Inicializace vektoru vnějších sil
uzel_sily = 4; % Uzel, na kterém působí síla
F_z(2*uzel_sily - 1) = 0; % Síla ve směru x je nulová
F_z(2*uzel_sily) = -100; % Síla ve směru y je záporná, působí shora dolů
```

```
% Předepsané posuvy
pocet_predepsanych_DOF=3;
u_predepsane= [1, 1, 0; 1, 2, 0; 7, 2, 0];
```

```
u(1) = 0; % Posuv u1x
u(2) = 0; % Posuv u1y
u(13) = 0; % Posuv uy7
```

5.6 Skript modifikace matice tuhosti a výpočtu deformace prutové soustavy

Tento skript nejprve modifikuje matici tuhosti podle předem stanovených okrajových podmínek. Poté kód vypočítává hodnoty posuvů pomocí řešení systému rovnic. Následně je celá prutová soustava vykreslená do jednoho grafického okna, ve kterém nalezneme vykreslenou konstrukci před deformací označenou černou barvou a vykreslenou konstrukci při deformaci označenou červenou barvou. Pro lepší přehlednost posunů uzlů a prodloužení prutů bylo použito zvětšené měřítko.

```
% Modifikace matice tuhosti kvůli předepsaným posuvům
K_g_mod = zeros(size(K_g));
K_g_mod=K_g;

predpodmineni = max(max(K_g)) % Vybrání maximální hodnoty z matice tuhosti

% Aplikace okrajových podmínek (vynulování řádků/sloupců pro předepsané posuvy)
for i = 1:pocet_predepsanych_DOF
    number_stycnik = u_predepsane(i,1);
    NDIM_DOF =u_predepsane(i,2);
    hodnota_posuvu = u_predepsane(i,3);
    globalni_pozice= IE(number_stycnik, NDIM_DOF);

    K_g_mod(globalni_pozice, :) = 0; % Vynulování řádku
    K_g_mod(:, globalni_pozice) = 0; % Vynulování sloupce
    K_g_mod(globalni_pozice, globalni_pozice) = predpodmineni*1; % Nastavení na 1

    F_z(globalni_pozice) = predpodmineni * hodnota_posuvu; % Úprava vektoru sil
end

K_g_mod=1/2*(K_g_mod+K_g_mod'); % Symetrizace modifikované matice tuhosti

u_reseni = K_g_mod \ F_z; % Řešení rovnice K*u = F pro získání posuvů

% Vykreslení deformovaného tvaru konstrukce
figure(2);
hold on;

u = zeros(number_stycnik * NDIM, 1); % Inicializace vektoru posuvů
NDIM = 2; % Počet dimenzí

scale = 2e8; % Zvětšení deformace pro vizualizaci
X_deformed = X + scale*reshape(u_reseni, NDIM, []).'; % Nové pozice uzlů
```

```
% Vykreslení původní a deformované soustavy
```

```
figure;
```

```
plotNodesAndElements(X, X_deformed, C);
```

```
legend('Původní pozice', 'Deformovaná pozice', 'Pruty');
```

```
xlabel('X');
```

```
ylabel('Y');
```

```
title('Deformace prutové soustavy s posuvy');
```

```
grid on;
```

```
% Funkce pro vykreslení prutové soustavy
```

```
function plotNodesAndElements(X, X_deformed, C)
```

```
    plot(X(:, 1), X(:, 2), 'bo');
```

```
    hold on;
```

```
    plot(X_deformed(:, 1), X_deformed(:, 2), 'rx');
```

```
    for i = 1:size(C, 1)
```

```
        line1 = X(C(i, 1), :);
```

```
        line2 = X(C(i, 2), :);
```

```
        line1_deformed = X_deformed(C(i, 1), :);
```

```
        line2_deformed = X_deformed(C(i, 2), :);
```

```
        plot([line1(1), line2(1)], [line1(2), line2(2)], 'k'); % Původní pruty
```

```
        plot([line1_deformed(1), line2_deformed(1)], [line1_deformed(2), line2_deformed(2)], 'r-');
```

```
% Deformované pruty
```

```
    end
```

```
end
```

6 Přehled dosažených výsledků

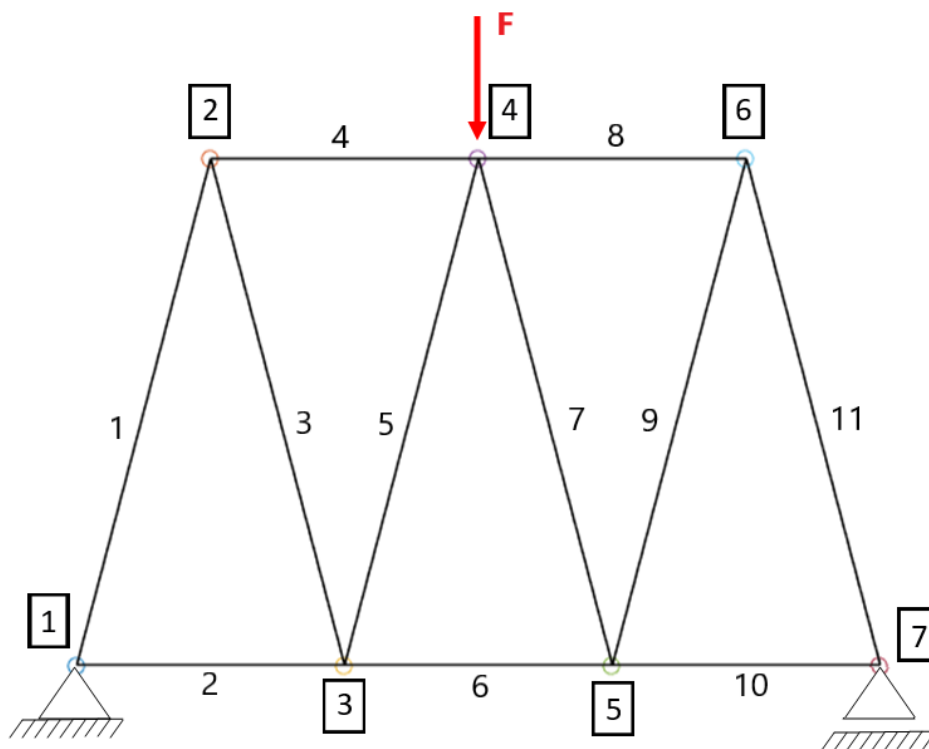
Pro vývoj numerického řešiče pro úlohy lineární pružnosti příhradových a nosníkových konstrukcí byla použita jednoduchá prutová soustava. Tato prutová soustava je složená ze sedmi styčníků a jedenácti prutů, které tvoří v konstrukci geometrické obrazce ve tvaru rovnoramenných trojúhelníků. Pro každý prut byl zvolen Youngův modul pružnosti E s hodnotou $200 \cdot 10^9$ Pascalů. Průřezová plocha prutů A byla zvolena $0,1 \text{ m}^2$.

Uložení prutové soustavy bylo zvoleno formou použití dvou vazeb na styčnících jedna a na styčnících sedm. Styčník jedna je uložen na kloubové vazbě, která přenáší reakční síly R ve vodorovném směru x (R_x) a ve svislém směru y (R_y). Styčník sedm je uložen na posuvné vazbě, která přenáší reakční síly R pouze ve svislém směru y (R_y).

Pro řešení prutové soustavy byly stanoveny následující okrajové podmínky:

- Síla F o velikosti 100 N působí na čtvrtém uzlu proti předem zvolenému souřadnicovému systému v ose y .
- Nulový posuv ve směru x pro uzel jedna.
- Nulový posuv ve směru y pro uzel jedna.
- Nulový posuv ve směru y pro uzel sedm.

Prutová soustava je analyzována v předem zvoleném souřadnicovém systému, kde osa x směřuje zleva doprava, osa y směřuje směrem nahoru a kladný směr momentu otáčení je zvolen proti směru hodinových ručiček.



Obrázek 18 Prutová soustava

Zdroj: vlastní

6.1 Určení vnitřních sil styčnickovou metodou

Pro výpočet vnitřních sil jsem využil styčnickovou metodu, která je založená na podmínce rovnováhy jednotlivých styčníků. Každý styčník bude řešen samostatně pomocí rovnic statické rovnováhy. Na základě toho určím neznámé síly v jednotlivých prutech.

6.1.1 Určení vnější statické určitosti

Při určení vnější statické určitosti nejprve provedeme uvolnění této prutové soustavy jako celku. Následně můžeme řešit rovnice statické rovnováhy:

$$\sum F_x = 0 : F_{Ax} = 0 \quad (12)$$

$$\sum F_y = 0 : F_{Ay} - F + F_{By} = 0 \quad (13)$$

$$\sum MA = 0 : -F \cdot 3 + F_{By} \cdot 6 = 0 \quad (14)$$

Z těchto získaných rovnic vyjádříme neznámé síly. Nejprve z rovnice (14) vyjádříme F_{By} :

$$F_{By} = \frac{F \cdot 3}{6} = \frac{100 \cdot 3}{6}$$

$$F_{By} = 50 \text{ N}$$

Poté vyjádřením a dosazením do rovnice (13) získáme hodnotu neznámé síly F_{Ay} :

$$F_{Ay} = -F_{By} + F = -50 + 100$$

$$F_{Ay} = 50 \text{ N}$$

Z rovnic statické rovnováhy jsme získaly dvě neznámé síly pro dvě rovnice statické rovnováhy. Z toho plyne, že prutová soustava je po vnější stránce staticky určitá. Dále jsme mohli z rovnic (6.2) a (6.3) vypočítat neznámé síly pro další výpočty.

6.1.2 Určení vnitřní statické určitosti

K určení vnitřní statické určitosti použijeme rovnici (11) ze čtvrté kapitoly.

$$p = 2 \cdot k - 3$$

Po dosazeních údajů o počtu prutů $p = 11$ a styčníků $k = 7$ dostaneme:

$$11 = 2 \cdot 7 - 3$$

$$11 = 11$$

Po dosazení hodnot jsme ověřili, že prutová soustava je vnitřně staticky určitá. Následně můžeme přistoupit k řešení jednotlivých styčníků za podmínek rovnováhy. Vnitřní síly určíme z rovnic rovnováhy $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$. K samotnému výpočtu je zapotřebí znát úhel mezi pruty. Jelikož prutová soustava tvoří geometrické obrazce ve tvaru rovnoramenných trojúhelníků, byl úhel při základně vypočítán pomocí goniometrické funkce tangens. Výsledná hodnota úhlu je $71^\circ 33'$ (71 stupňů a 33 minut). Při výpočtu vnitřních sil prutů je doporučeno začínat od styčniku, který obsahuje pouze dvě neznámé síly.

Styčník 7

Z rovnic statické rovnováhy dostaneme:

$$\sum F_x = 0 : -N_{10} - N_{11} \cdot \cos \alpha = 0 \quad (15)$$

$$\sum F_y = 0 : F_{B_y} + N_{11} \cdot \sin \alpha = 0 \quad (16)$$

Nejprve z rovnice (16) vyjádříme neznámou sílu N_{11} :

$$N_{11} = -\frac{F_{B_y}}{\sin \alpha} = -\frac{50}{\sin 71^\circ 33'}$$

$$N_{11} = -52,7 \text{ N}$$

Dosazením síly N_{11} do rovnice (15) získáme výslednou hodnotu síly N_{10} :

$$N_{10} = -N_{11} \cdot \cos \alpha = -(-52,7) \cdot \cos 71^\circ 33'$$

$$N_{10} = 16,68 \text{ N}$$

Tento postup uplatníme na všechny zbývající styčníky, dokud nebudou zjištěny všechny vnitřní síly prutů.

Styčník 6

Rovnice statické rovnováhy:

$$\sum F_x = 0 : -N_8 - N_9 \cdot \cos \alpha + N_{11} \cdot \cos \alpha = 0 \quad (17)$$

$$\sum F_y = 0 : -N_9 \cdot \sin \alpha - N_{11} \cdot \sin \alpha = 0 \quad (18)$$

Po vyjádření neznámé síly N_9 z rovnice (18) dostaneme:

$$N_9 = -\frac{N_{11} \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha} = -\frac{-52,7 \cdot \sin 71^\circ 33'}{\sin 71^\circ 33'}$$

$$N_9 = 52,7 \text{ N}$$

Dosazením síly N_9 do rovnice (17) získáme výslednou hodnotu síly N_8 :

$$N_8 = -N_9 \cdot \cos \alpha + N_{11} \cdot \cos \alpha = -52,7 \cdot \cos 71^\circ 33' + (-52,7) \cdot \sin 71^\circ 33'$$

$$N_8 = -33,36 \text{ N}$$

Styčník 1

Rovnice statické rovnováhy:

$$\sum F_x = 0 : F_{Ax} + N_2 + N_1 \cdot \cos \alpha = 0 \quad (19)$$

$$\sum F_y = 0 : F_{Ay} + N_1 \cdot \sin \alpha = 0 \quad (20)$$

Po vyjádření neznámé síly N_1 z rovnice (20) dostaneme:

$$N_1 = - \frac{F_{Ay}}{\sin \alpha} = - \frac{50}{\sin 71^\circ 33'}$$

$$N_1 = - 52,7 \text{ N}$$

Dosazením síly N_1 do rovnice (19) získáme výslednou hodnotu síly N_2 :

$$N_2 = - F_{Ax} - N_1 \cdot \cos \alpha = - (-52,7) \cdot \cos 71^\circ 33'$$

$$N_2 = 16,68$$

Styčník 2

Rovnice statické rovnováhy:

$$\sum F_x = 0 : N_4 + N_3 \cdot \cos \alpha - N_1 \cdot \cos \alpha = 0 \quad (21)$$

$$\sum F_y = 0 : - N_1 \cdot \sin \alpha - N_3 \cdot \sin \alpha = 0 \quad (22)$$

Po vyjádření z rovnice (22) dostaneme neznámou sílu N_3 :

$$N_3 = - N_1$$

$$N_3 = 52,7 \text{ N}$$

Dosazením síly N_3 do rovnice (21) získáme výslednou hodnotu síly N_4 :

$$N_4 = - N_3 \cdot \cos \alpha + N_1 \cdot \cos \alpha = - 52,7 \cdot \cos 71^\circ 33' - 52,7 \cdot \cos 71^\circ 33'$$

$$N_4 = -33,36 \text{ N}$$

Styčník 3

Rovnice statické rovnováhy:

$$\sum F_x = 0 : - N_2 + N_6 + N_5 \cdot \cos \alpha - N_3 \cdot \cos \alpha = 0 \quad (23)$$

$$\sum F_y = 0 : N_3 \cdot \sin \alpha + N_5 \cdot \sin \alpha = 0 \quad (24)$$

Po vyjádření z rovnice (24) dostaneme neznámou sílu N_5 :

$$N_5 = - N_3$$

$$N_5 = - 52,7 \text{ N}$$

Dosazením síly N_5 do rovnice (23) získáme výslednou hodnotu síly N_6 :

$$N_6 = N_2 - N_5 \cdot \cos \alpha + N_3 \cdot \cos \alpha = 16,68 - (-52,7) \cdot \cos 71^\circ 33' + 52,7 \cdot \cos 71^\circ 33'$$

$$N_6 = 50,04 \text{ N}$$

Styčník 5

Rovnice statické rovnováhy:

$$\sum F_y = 0 : N_7 \cdot \sin \alpha + N_9 \cdot \sin \alpha = 0 \quad (25)$$

Po vyjádření z rovnice (25) dostaneme neznámou sílu N_7 :

$$N_7 = -N_9$$

$$N_7 = -52,7 \text{ N}$$

K vypočítání všech vnitřních sil prutů nám stačilo vyřešit šest styčníků. Síly N_1 , N_4 , N_5 , N_7 , N_8 , N_{11} , které vyšly se záporným znaménkem, jsou namáhány na tlak. Naopak síly N_2 , N_3 , N_6 , N_9 , N_{10} , které vyšly s kladným znaménkem, jsou namáhány na tah.

6.2 Výsledky z prostředí Matlabu

V rámci práce, která se věnovala vývoji numerického řešiče pro úlohy lineární pružnosti příhradových a nosníkových konstrukcí, byly zjištěny výsledky z prostředí Matlabu, které mají klíčovou roli při posuzování stability konstrukce. Při zadání konkrétních okrajových podmínek byly zjištěny posuny všech sedmi styčníků v ose x a y . Výsledné hodnoty těchto posunů jsou uvedeny v tabulce 1.

Při posunech uzlů v prutové soustavě také došlo v závislosti aplikování okrajových podmínek k prodloužení prutů. Chování prutů je určeno důsledkem deformací, které vznikají při působení vnějších sil. Tyto deformace následně ovlivňují chování celé konstrukce ve stabilitě a rozložení sil v soustavě. Výsledné hodnoty prodloužení prutů jsou zaznamenány v tabulce 2.

Celková deformace prutové soustavy v závislosti na zadávání okrajových podmínek je viditelná na obrázku 19, kdy červená barva značí prutovou soustavu v deformovaném stavu a černá barva označuje prutovou soustavu před zatížením.

Tabulka 1 Posuvy styčníků

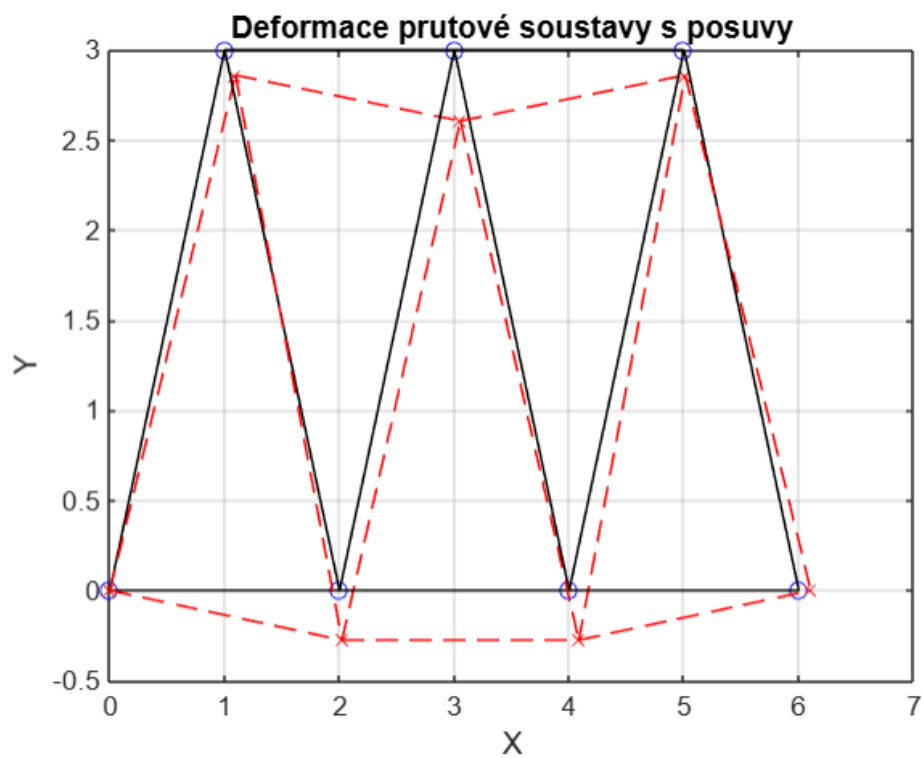
Styčnick	Posun v ose x [m]	Posun v ose y [m]
Styčnick 1	0	0
Styčnick 2	4.6875e-10	-7.0526 e-10
Styčnick 3	1.0417e-10	-1.3758 e-09
Styčnick 4	2.6042e-10	-1.9769 e-09
Styčnick 5	4.1667 e-10	-1.3758 e-09
Styčnick6	5.2083e-11	-7.0526 e-10
Styčnick 7	5.2083e-10	0

Zdroj: vlastní zpracování

Tabulka 2 Prodloužení/zkrácení prutů

Prut	Typ	Hodnota [m]
Prut 1	Zkrácení	0.1013
Prut 2	Prodloužení	0.0395
Prut 3	Prodloužení	0.1061
Prut 4	Zkrácení	0.0252
Prut 5	Zkrácení	0.1034
Prut 6	Prodloužení	0.0625
Prut 7	Zkrácení	0.1034
Prut 8	Zkrácení	0.0252
Prut 9	Prodloužení	0.1061
Prut 10	Prodloužení	0.0395
Prut 11	Zkrácení	0.1013

Zdroj: vlastní zpracování



Obrázek 19 Deformace prutové soustavy

Zdroj: vlastní

Závěr

Tato práce se zabývala vývojem numerického řešiče pro úlohy lineární pružnosti příhradových a nosníkových konstrukcí. Nejprve byly sestaveny lokální matice tuhosti jednotlivých prutů, které byly následně převedeny do společné matice v globálním souřadnicovém systému. Poté byly zadávány okrajové podmínky a bylo sledováno chování samotné prutové soustavy.

V této práci jsou popsány jednotlivé kroky k sestavení lokální matice tuhosti pro daný prvek. Tato matice byla použita pro sestavení lokálních matic tuhosti jednotlivých prutů. Následně byla převedena do globální matice tuhosti. Tyto postupy jsou implementovány do programu Matlab.

Matlab byl dále využit pro výpočet délek prutů, pro výpočet posuvů při zadávání okrajových podmínek konstrukce a pro vykreslení samotné konstrukce při deformaci do grafu.

Přínos práce spočívá ve vývoji numerického řešiče, který umožňuje efektivní a přesnou analýzu mechanického chování příhradových a nosníkových konstrukcí v prostředí Matlabu. Dále tento řešič může sloužit i jako výukový materiál v technických oborech.

S numerickým řešičem vytvořeným pro tuto práci lze pokračovat v analýze libovolných prutových konstrukcí s možností jeho rozšíření a úprav podle specifických potřeb.

Seznam použité literatury

- GARSTKA, Aleš. Svarové spoje. Online. Střední průmyslová škola Ostrava - Vítkovice. 2013. Dostupné z: https://www.spszengrova.cz/wp-content/uploads/2020/04/sps2_svarove_spoje-UT.pdf<https://drumlo.com/tab>. [cit. 2025-02-06].
- GREGOR, Miroslav. Technologie a technika lepení - základní informace. Online. Lepidla.cz. 2021. Dostupné z: <https://www.lepidla.cz/clanky/technologie-a-technika-lepeni---zakladni-informace>. [cit. 2025-02-06].
- HRADY.CZ. Rozhledna Eiffelova věž. Online. Dostupné z: <https://www.hrady.cz/rozhledna-eiffelova-vez/>. [cit. 2025-02-05].
- HRUŠKOVÁ, Sabina. Zjednodušená styčnicková metoda. Online. DocPlayer. 2016. Dostupné z: <https://docplayer.cz/7578038-Zjednodusena-stycnikova-metoda.html>. [cit. 2025-02-06].
- KATEDRA STAVEBNÍ MECHANIKY FS VŠB. Rovinné nosníkové soustavy II. Online. Dostupné z: <https://slideplayer.cz/slide/15257465/>. [cit. 2025-02-06].
- KIM, Nam-Ho a SANKAR, Bhavani V. Introduction to finite element analysis and design. New York: John Wiley, c2009. ISBN 978-0-470-12539-7.
- LÁVIČKA, Miroslav. Modernizace výuky všeobecných a odborných předmětů. Online. SŠ OSELCE. 2013. Dostupné z: https://www.stredniskolaoselce.cz/data/download/file/okal/18.N%C3%BDty%2C%20n%C3%BDtov%C3%A9%20spoj-VY_32_INOVACE_18_18.pdf. [cit. 2025-02-06].
- STAVEBNÍ KOMUNITA. Metody řešení prutových soustav. Online. 2012. Dostupné z: <http://stavebnikomunita.cz/profiles/blogs/metody-reseni-prutovych-soustav>. [cit. 2025-02-05].
- SVOBODA, Jaroslav. Mechanika, statika. Online. In: STŘEDNÍ PRŮMYSLOVÁ ŠKOLA A VYŠŠÍ ODBORNÁ ŠKOLA TECHNICKÁ BRNO. 2012. Dostupné z: https://www.sokolska.cz/DUMy/SPS,%20MEC,%20CAD/VY_32_INOVACE_10-18.pdf. [cit. 2025-02-06].
- ŠEBEK, Radek. MECHANIKA – STATIKA. Online. Průmyslovka Liberec. 2012. Dostupné z: <https://www.pslib.cz/ales.najman/podklady/literatura/STATIKA%20%C5%A0EBEK%20%C5%98EDN%C3%81%C5%A0KY.pdf>. [cit. 2025-02-06].
- VERDE, Madrugada. Eiffelova věž. Online. In: Depositphotos. 2015. Dostupné z: <https://depositphotos.com/cz/photo/eiffel-tower-65643481.html>. [cit. 2025-02-06].
- ZEMAN, Radek. Prutové soustavy - průsečná metoda. Online. OnlineSchool. 2023a. Dostupné z: <https://onlineschool.cz/statika/prutove-soustavy-prusecna-metoda/>. [cit. 2025-02-06].
- ZEMAN, Radek. Prutové soustavy - styčnicková metoda. Online. OnlineSchool. 2023b. Dostupné z: <https://onlineschool.cz/statika/prutove-soustavy-stycnikova-metoda/>. [cit. 2025-02-06].

Přílohy

Příloha 1 – Program pro analýzu prutové soustavy

```
close all; % Zavření všech otevřených grafických oken
clear all; % Vymazání všech proměnných z pracovního prostoru

NDIM=2; % Počet dimenzí (2D)

% Definice uzlů v prostoru (souřadnice uzlů)
X=[0 0;1 3;2 0;3 3;4 0;5 3;6 0];

% Definice prutů (spojení mezi uzly)
C=[1,2;1,3;2,3;2,4;3,4;3,5;4,5;4,6;5,6;5,7;6,7];

E = 200e9; % Youngův modul pružnosti [Pa]
A = 0.1; % Průřezová plocha [m^2]

number_styčník = size(X,1); % Počet uzlů
number_prutu = size(C,1); % Počet prutů

N=size(X); % Počet řádků (uzlů)

% Vykreslení uzlů
for i=1:number_styčník
    x_point=X(i,1);
    y_point=X(i,2);
    figure(1)
    plot(x_point,y_point,'o') % Kreslení uzlů jako body
    line(-1, 7);
    line(-1, 4);
    hold on
end

% Vykreslení prutů mezi uzly
for i = 1:size(C, 1)
    line1 = X(C(i, 1), :);
    line2 = X(C(i, 2), :);

    plot([line1(1), line2(1)], [line1(2), line2(2)], 'k'); % Kreslení prutů jako čáry
end
```

% Výpočet délek jednotlivých prutů

for i = 1:size(C, 1)

 a = C(i, 1);

 b = C(i, 2);

 x1 = X(a, 1);

 y1 = X(a, 2);

 x2 = X(b, 1);

 y2 = X(b, 2);

 lv(i) = sqrt((x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2); % Délka prutu

 Ev(i) = E; % Youngův modul

 Av(i) = A; % Průřezová plocha

end

% Přiřazení čísel stupňům volnosti jednotlivých uzlů

a=0;

for i=1:number_stycnik

 for j=1:NDIM

 a=a+1;

 IE(i,j)=a; % Matice indexů stupňů volnosti

 end

end

%cislo_rovnice = IE(2,2);

K_g=zeros(number_stycnik*NDIM,number_stycnik*NDIM); % Globální matice tuhosti

% local-elemental stiffness matrix

pocet_uzlu_prutu=2; % Počet uzlů na jednom prutu (každý prut spojuje 2 uzly)

% Sestavení globální matice tuhosti

for i_prut=1:number_prutu

 %cislo_prutu =i_prut;

 K_el_glob=matice_tuhosti_prutu(i_prut,X,C,Av,Ev,lv); % Výpočet elementární matice tuhosti

```
a=0;
for i=1:pocet_uzlu_prutu
    for j=1:NDIM
        a=a+1;
        b=0;
        for k=1:pocet_uzlu_prutu
            for l=1:NDIM
                b=b+1;

a;
b;

for i = 1:pocet_uzlu_prutu
    for j = 1:NDIM
        AA = IE(C(i_prut, i), j);

        for k = 1:pocet_uzlu_prutu
            for l = 1:NDIM
                BB = IE(C(i_prut, k), l);

                K_g(AA, BB) = K_g(AA, BB) + K_el_glob(NDIM * (i - 1) + j, NDIM * (k - 1) + l);
            end
        end
    end
end
end
end
end
end
end
```

```
pocet_predepsanych_DOF=3;
```

```
% Modifikace matice tuhosti kvůli předepsaným posuvům
K_g_mod = zeros(size(K_g));
K_g_mod=K_g;

predpodmineni = max(max(K_g)) % Vybrání maximální hodnoty z matice tuhosti

% Aplikace okrajových podmínek (vynulování řádků/sloupců pro předepsané posuvy)
for i = 1:pocet_predepsanych_DOF
    number_stycnik = u_predepsane(i,1);
    NDIM_DOF =u_predepsane(i,2);
    hodnota_posuvu = u_predepsane(i,3);
    globalni_pozice= IE(number_stycnik, NDIM_DOF);

    K_g_mod(globalni_pozice, :) = 0; % Vynulování řádku
    K_g_mod(:, globalni_pozice) = 0; % Vynulování sloupce
    K_g_mod(globalni_pozice, globalni_pozice) = predpodmineni*1; % Nastavení na 1

    F_z(globalni_pozice) = predpodmineni * hodnota_posuvu; % Úprava vektoru sil
end

K_g_mod=1/2*(K_g_mod+K_g_mod'); % Symetrizace modifikované matice tuhosti

u_reseni = K_g_mod \ F_z; % Řešení rovnice  $K*u = F$  pro získání posuvů

% Vykreslení deformovaného tvaru konstrukce
figure(2);
hold on;

u = zeros(number_stycnik * NDIM, 1); % Inicializace vektoru posuvů
NDIM = 2; % Počet dimenzí

scale = 2e8; % Zvětšení deformace pro vizualizaci
X_deformed = X + scale*reshape(u_reseni, NDIM, []).'; % Nové pozice uzlů

% Vykreslení původní a deformované soustavy
figure;
plotNodesAndElements(X, X_deformed, C);

legend('Původní pozice', 'Deformovaná pozice', 'Pruty');
xlabel('X');
ylabel('Y');
title('Deformace prutové soustavy s posuvy');
grid on;
```

% Funkce pro vykreslení prutové soustavy

function plotNodesAndElements(X, X_deformed, C)

plot(X(:, 1), X(:, 2), 'bo');

hold on;

plot(X_deformed(:, 1), X_deformed(:, 2), 'rx');

for i = 1:size(C, 1)

line1 = X(C(i, 1), :);

line2 = X(C(i, 2), :);

line1_deformed = X_deformed(C(i, 1), :);

line2_deformed = X_deformed(C(i, 2), :);

plot([line1(1), line2(1)], [line1(2), line2(2)], 'k'); % Původní pruty

plot([line1_deformed(1), line2_deformed(1)], [line1_deformed(2), line2_deformed(2)], 'r-');

% Deformované pruty

end

end

Příloha 2 – Funkce pro výpočet globální matice tuhosti prutu

% Výpočet globální matice tuhosti pro daný prut

function [K_el_glob] = matice_tuhosti_prutu(cislo_prutu,X,C,Av,Ev,lv)

K_el=zeros(4,4);% Inicializace lokální matice tuhosti 4x4 (pro 2D prutový prvek)

i=cislo_prutu % Uložení čísla prutu do proměnné i

K_el = ((Av(i)*Ev(i))/lv(i))*[1 0 -1 0;0 0 0 0;-1 0 1 0;0 0 0 0];

% Získání souřadnic počátečního a koncového uzlu daného prutu

pozice1 = X(C(i, 1), :); % Souřadnice počátečního uzlu prutu

pozice2 = X(C(i, 2), :); % Souřadnice koncového uzlu prutu

% Výpočet kosinu a sinu úhlu natočení prutu vzhledem k souřadnému systému

cosine = (pozice2(1)- pozice1(1)) /lv(i);

sine = (pozice2(2)- pozice1(2)) /lv(i);

% Transformační matice pro přechod mezi lokálním a globálním souřadným systémem

T = [cosine sine 0 0;-sine cosine 0 0;0 0 cosine sine;0 0 -sine cosine];

% Výpočet globální matice tuhosti: transformace z lokálního do globálního souřadného systému

K_el_glob = T' * K_el * T;

K_el_glob

return